Les travaux personnels du Lycée Ermesinde Mersch

Die Karten von Cassini

Tatalidis Clara

Classe : 4CLA1
Tuteur : Goedert Tom

Février 2015

Die Karten von Cassini

Travail Personnel 14/15

Clara Tatalidis, 4Cla1

Tuteur: Tom Goedert

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit den Kartographischen Messungen in Frankreich im 17. Jahrhundert und dem dafür angewandten Triangulationsprinzip. Mein Ziel ist es, meine Kenntnisse in der Mathematik bezüglich der Trigonometrie und ihrer praktischen Anwendung zu erweitern, und gleichzeitig einen Tieferen Einblick in die Europäische Geschichte zu bekommen. Dadurch wird die sonst eigentlich Abstrakte Mathematik in einen praktischen und historischen Kontext gesetzt, was sie viel greifbarer macht.

Die Arbeit ist in drei, resp. vier Teile/Kapitel eingeteilt. Kapitel 1 befasst sich oberflächlich mit den geschichtlichen Hintergründen der Karten von Cassini, also dem Grund ihrer Entstehung und den Leuten welche dieses ganze Projekt leiteten. Kapitel 2 erklärt und beweist verschiedene Prinzipien der Trigonometrie, welche für die Kartografierung Frankreichs von Referenz sind. Das dritte Kapitel verbindet in dem Sinne die beiden vorherigen – das Prinzip der Triangulation wird in seiner Anwendung erklärt. Die Konklusion beinhaltet, neben meiner persönlichen Rezension der Arbeit, weitere Fragestellungen welche während der Verfassung der Arbeit aufkamen und mögliche Antworten darauf.

Ich hoffe mit dieser Arbeit das Interesse einiger für die Mathematik und ihre Historische Wichtigkeit wecken zu können.

1) Die Geschichte der Karten von Cassini

Erste Kartografische Arbeiten

Die erste Notwendigkeit für Präzise Karten zeigte sich in der Seefahrt. Im 17. Jahrhundert machte sich das Verlangen nach präzisen Karten bemerkbar, hauptsächlich in der Seefahrt. Bis jetzt haben die Seefahrer basierend auf sogenannte Itinerarien oder Reisebücher navigiert – schriftlich fixierte Segelanweisungen, welche Strömungen, Winde, Häfen und Ankerplätze, Tiefen, verborgene Gefahren und auffällige Landschaftsmerkmale angaben. Karten waren derzeit nicht hilfreich: Weiße Flecken (auf der Karte nicht eingezeichnete Bereiche) und nicht Realitätsgemäße Darstellungen der Küstenlinien machten Karten zu lediglich zusätzlichen Hilfsmitteln. Doch als letztendlich die Techniken der Kartografie durch höhere Präzision der Messgeräte und Fernrohre verbessert wurden, wurden auch die Karten viel genauer. Im 17. Jh. wurde ganz Frankreich, Küsten wie Binnenland, anhand des Pariser Meridians kartographiert, und daraufhin haben französische Seefahrer angefangen, die ganze Welt auf Karten wiederzugeben.

Erste Nennenswerte Kartografische Versuche führte vorerst das Militär durch. Ein richtiges System wurde nicht angewendet. Bei den Karten handelt es sich um Pläne von militärisch wichtigen Orten, in Halb-Perspektive, ohne jegliche Rücksicht auf die Unebenheiten des Bodens geschweige denn den geografischen Standort der Orte oder den Maßstab. Erst am ende des 18. Jh. kamen erste Spezialisten der Trigonometrie und Geodäsie ins Spiel, sodass die ersten geometrischen Karten entstehen konnten. Die Festlegung des Pariser Meridians und die Gründung der *Académie Royale des Sciences* sollten unter anderem dazu beitragen.

Colbert und die Académie Royale

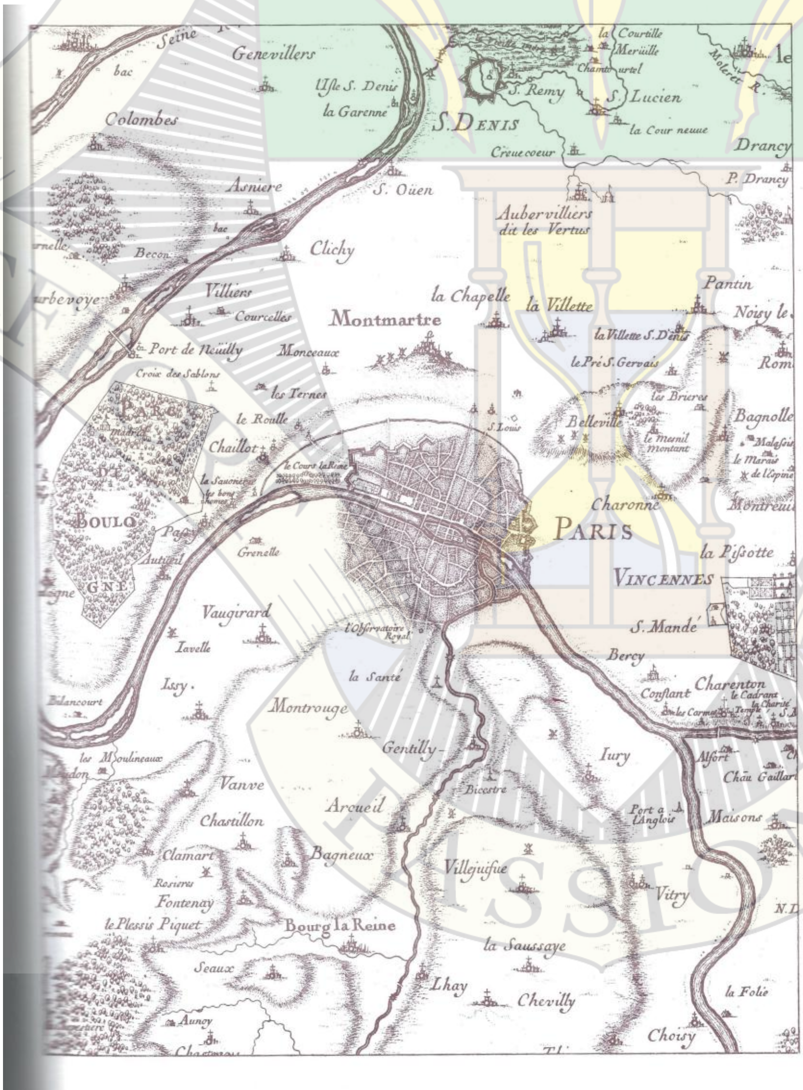
Geboren 1619 ist Jean-Baptiste Colbert in einer Kaufmannsfamilie aufgewachsen. Minister wurde er mit 30 Jahren, und gewann ab seinem 45 Lebensjahr mehr und mehr Einfluss auf Staatsangelegenheiten – er hatte erhebliche Macht über alle Angelegenheiten Außer dem Kriegswesen. 22 Jahre lang diente er Louis XIV als Finanzminister, wo er die Infrastruktur Frankreichs ausbaute um den Handel voranzutreiben.
Er beschloss, ein Inventar anzulegen, in dem sämtliche Besitztümer und Bewohner Frankreichs verzeichnet waren. Im Auftrag Colberts wurden 1663 alle vorliegenden Urkunden und Dokumente über jegliche Ressourcen wie Wasser und Ackerland, sowie alle vorzufindenden Karten gesammelt und dem königlichen Kartografen Nicolas Sanson übergeben, welcher die einzelkarten zusammenfassen und in größeren Übersichten widergeben sollte. Als sich, wie nach Colberts Vermutungen, feststellte dass die gesammelten Karten ungenau und dadurch unmöglich zusammenzubringen waren, gründete er 1665-1666 die *Académie Royale des Sciences*. So ermöglichte er die Beseitigung dieses Problems und konnte nebenbei auch weitere damals für Frankreich wichtige wissenschaftliche Fragen angehen.

Ziel der Akademie war das beauftragte Forschen im Gegenzug zu Bezahlung – die Forscher, die für die Akademie arbeiteten mussten neben ihren eigenen Interessen auch Fragestellungen der Leute nachgehen, die sie bezahlten. So konnten auch Projekte wie die Vermessung Frankreichs stattfinden.

(1) *Die Pariser Sternwarte*

Die Pariser Sternwarte, gebaut 1672, wurde zum Hauptsitz der Akademie. Sie wurde komplett ohne Holz oder Metall gebaut, um Brände und elektromagnetische Störungen zu Verhindern. Sie ist exakt an die vier Himmelsrichtungen ausgerichtet – als Symmetrieachse dient der Pariser Meridian. Der Meridian wurde seinerseits in der Not nach präzisen Karten festgelegt. Kartografie erfordert Längen- und Breitengrade, die die Erdoberfläche einteilen – Koordinaten, an denen man sich orientieren kann. Die Festlegung des Meridians legte die Grundlagen für die Kartografierung Frankreichs. Daher auch die Ausrichtung der Sternwarte – Sie bietet einen zentralen Anhaltspunkt für alle Kartografischen Arbeiten.

Die erste Karte, die unter der Leitung Picards und Cassinis in der Sternwarte entstand, war die *Carte des environs de Paris.*



7,33 - Carte des environs de Paris (1678)

(2) *Carte des environs de Paris* (Auszug)

Der Pariser Meridian

Als erste Karten erstellt wurden, gab es noch keine universell festgelegten Koordinaten. Die seefahrenden Nationen, welche als erste Karten der Küstenverläufe etablierten, legten sich immer je eine eigene Nord-Süd-Linie fest. Die „offizielle“ Festlegung und Präzision des Pariser Meridians legte die Grundlage für eine einheitliche und ebenso präzise einheitliche Kartographierung Frankreichs, da sie einen gemeinsamen Anhaltspunkt für Koordinaten darstellte.

Ein Mitglied der Akademie, der Abbé Jean Picard (1620 – 1682) führte, auf Anweisung der Akademie, die nötigen Messungen für die Festlegung eines Meridians (1669-1670). Beginnend mit einer Grundlinie zwischen Villejuif und Juvisy, deren Enden heute noch mit zwei Pyramiden-ähnlichen Pfeilern markiert sind, errechnete er die Distanz zwischen dem Dorf Sourdon bis hin zu Malvoisine. Der Meridian verläuft exakt an der Symmetrieachse der Sternwarte. Die Technik, die er dafür anwendete, war die *Triangulation*, welche im 3. Kapitel erläutert wird. Das Prinzip der Triangulation hatte er vom Holländischen Wissenschaftler Snellius aufgegriffen, der die Grundprinzipien der Triangulation festlegte. Picard setzte somit den Anfang für die Triangulation Frankreichs.

(3) *Steinpfähler in Juvisy, markiert heute noch das Südende der Grundlinie*

Picard, die vier Cassinis und ihr Werk

Die Akademie nahm, sogar noch vor ihrer endgültigen Fertigstellung 1683, Colberts Auftrag zur Erstellung einer Präzisen Karte ganz Frankreichs an. Die Sternwarte beauftragte Picard mit den Entsprechenden Messungen. Nach seinen Messungen für den Meridian wurde Picard zum Direktor der Sternwarte genannt. In den folgenden Jahren führte er, mithilfe von Cassini I und seinen drei Nachfolgern, die nötigen astronomischen Beobachtungen durch, um die Form und Größe Frankreichs zu bestimmen.

Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), auch bekannt als Cassini I, kam 1669 aus Italien nach Frankreich. Er nahm die französische Staatsbürgerschaft an und änderte seinen Vornamen in Jean-Dominique. Er heiratete Geneviève de Laistre und zog mit ihr ins *Château de Thury* ein, in dem die Familie Cassini über mehrere Jahre residierte und in dem auch wichtige astronomische Beobachtungen stattfanden. Cassini I widmete sein Leben der Kartographierung Frankreichs. Cassinis Nachfolger waren:

- Cassini II: Jaques (1677-1756)
- Cassini III: César-Francois (1714-1784)
- Cassini IV: Jaques-Dominique (1748-1845)

(4) *Cassini I*

Im zweiten Stock der Sternwarte richtete Cassini I einen Raum zur Beobachtung des Sonnenverlaufs an. Der Raum wird heute auch *Salle Cassini* genannt. Der Null-Meridian von Paris verläuft genau durch die Mitte dieses Raumes.

In den folgenden Jahren schritten Picard, Cassini und später deren Nachfolger durch Frankreich voran, um ihre komplette Form und Größe auf Papier zu bringen. Nach der Fertigstellung der Karte stellte sich heraus, das Frankreich um etwa 20 % kleiner war als ursprünglich gedacht. Andererseits profitierte Frankreich in den nächsten

Jahrzehnten sehr stark von ihren präzisen Karten, welche ihnen bei Kriegen einen starken Vorteil gaben. 1790 wurde die fertige Karte von Cassini IV publiziert. Am Ende der Arbeit überzog Frankreich ein Netz aus über 800 exakt vermessenen Dreiecken. Mithilfe derer konnten die wichtigsten Städte und Ortschaften Frankreichs auf einer Karte in Bezug zueinander gesetzt werden.

8,25 - Carte de Cassini (1779)

(5) *Carte de Cassini* (Auszug)

(6)*Komplette Karte Frankreichs*

Schwere Umstände

Wir haben gesehen, dass Triangulationspunkte waren oft Merkmale wie Kirchtürme oder Bergspitzen waren. Was solche Punkte geeignet machte ist vor allem ihre Sichtbarkeit und die gute Erkennbarkeit ihrer Spitze. Jeder Punkt musste von den anderen beiden aus gut sichtbar sein. Die Orte mussten immer im Voraus ausgekundschaftet werden, so dass man keine üble Überraschung erlebte, wenn man das schwer transportierbaren Material irgendwo hinaufgeschleppt hatte.

In den Ortschaften musste auch immer nach Erlaubnis gefragt werden. Glücklicherweise waren die für die Gebäude verantwortlichen Pastoren und Bürgermeister meist gebildete Menschen, welche die Gründe der Kartografen nachvollziehen konnten. Einen Unterschlupf fand man dann in den Kirchen und Klöstern, oder natürlich auch Herbergen.

Doch es konnte auch problematisch werden. Bei Messungen auf freiem Feld oder auf Bergen, mitten in der Nacht, mussten kleine Schuppen aus Holz errichtet werden, in denen die Leute samt Ausrüstung noch genug Platz zum Schlafen und Kochen hatten. Dies konnte ziemlich umständlich werden.

Bei den Messungen ging oft viel Zeit verloren. Dies geschah vor allem durch Sachen wie die präzise Einstellung von Pendeluhren, welche nötig war um Messungen an weit voneinander liegenden Orten zu koordinieren. Für die Einstellung mussten die Auf- und Untergänge der Jupitermonde über mehrere Nächte beobachtet werden. Hinzu kommt die Auskundschaftung der Orte, welche im voraus erledigt werden musste, um sicherzustellen dass die ausgewählten Punkte sich zur Triangulation eigneten.

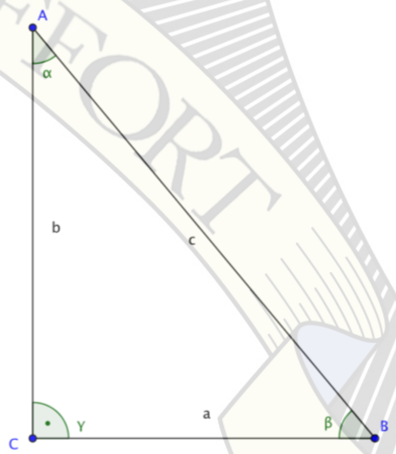
Nichtsdestotrotz schlugen sich Picard, die Cassinis und Ihre Mitarbeiter durch Frankreich und vollbrachten ihre vollständige Kartographierung.

2) Trigonometrie

Um das Vorgehen bei der Triangulation besser nachvollziehen zu können ist es wichtig, die Prinzipien der Trigonometrie zu kennen. Mithilfe von Trigonometrie kann man unbekannte Längen und Winkel in einem Dreieck errechnen. Dies tut man mithilfe von Sätzen und bekannten Verhältnissen. Dabei helfen Sinus, Cosinus und Tangens – sie beschreiben die Verhältnisse zwischen den Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks.

Am rechtwinkligen Dreieck

Das Kapitel beginnt mit der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck. Man sollte jedoch klarstellen, dass man mithilfe von rechtwinkligen Dreiecken in einer Welt ohne rechte Winkel nicht weit kommt. Dieses Subkapitel dient zur Veranschaulichung der Sinus-, Cosinus- und Tangens-Verhältnisse, da diese in den weiteren Teilen wichtig werden.



<u>Katheten und Hypotenusen:</u> Bei unserem Dreieck ist c die Hypotenuse – die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Die Gegenkathete eines Winkels ist die Seite die ihm gegenüberliegt: Die Gegenkathete von α ist die Seite a. Die Ankathete ist die Seite, die vom Winkel abgeht und nicht die Hypotenuse ist. Im Falle von α wäre die Ankathete b.

Die Seiten sind nach ihren gegenüberliegenden Winkeln benannt.

Sinus, Cosinus und Tangens beschreiben folgende Verhältnisse:

Sinus: Der Sinus eines Winkels beschreibt das Verhältnis seiner Gegenkathete zur Hypotenuse.

Der Sinus von α: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$

Cosinus: Der Cosinus beschreibt das Verhältnis der Ankathete eines Winkels zur Hypotenuse.

Der Cosinus von α: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$

Tangens: Der Tangens beschreibt das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete eines Winkels.

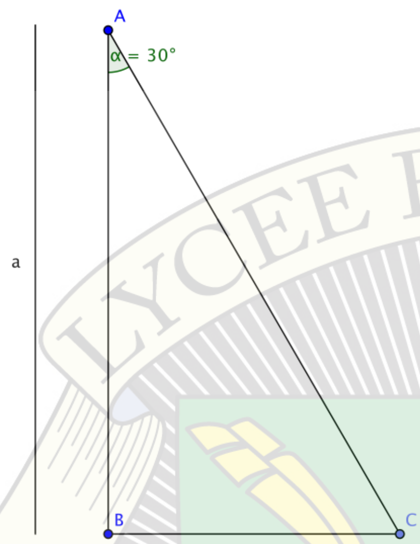
Der Tangens von α: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

Je nachdem, welche Informationen man über das Dreieck hat, kann man eines der Verhältnisse anwenden, um einen Winkel oder eine Seite des Dreiecks zu errechnen.

$\Rightarrow$ Anwendung

Wir kennen nun die immer geltenden Verhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck. Es gilt nun, sie anzuwenden. Um eine dieser Gleichungen anwenden zu können, muss man je nach dem, welche Längen und Winkel man kennt, diese in der passenden Gleichung einzusetzen, um dann die Unbekannte herauszufinden.

Beispiel:



In diesem rechtwinkligen Dreieck kennen wir:

- Einen Winkel (außer des rechten Winkels)
- Dessen Gegenkathete

Wir suchen die Länge der Ankathete.

Die Gleichung, in der man diese Informationen herausfinden kann, ist das Tangens-Verhältnis: $\tan(30) = \frac{20}{a}$

Wie rechnen wir das nun aus?

Die Tangens-funktion im Taschenrechner (genauso wie die Sinus- und Cosinusfunktion) gibt dem Winkel einen numerischen Wert. Im Falle von tan(30) ist dieser Wert $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wir haben also:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{20}{a}$$

Führen wir diese Rechnung weiter – wir rechnen über Kreuz und führen die Gleichung weiter, um die Unbekannte zu isolieren:

$$\sqrt{3}a = 60 \ \ | : \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \ a = 20\sqrt{3}$$

Dies ist unser Endresultat. Die Länge der Sekante a beträgt $20\sqrt{3}$ cm.

Auf diese Weise lassen sich Seiten und auch Winkel an Dreiecken präzise und ohne Konstruktion errechnen.

Am beliebigen Dreieck

Nun kommen wir zu den verschiedenen Formeln und Sätzen, die bei der Triangulation von Vorteil erscheinen. Die Sinus- und Cosinusformel ermöglichen, anhand verschiedener Datum unbekannte Seitenlängen eines Dreiecks zu errechnen. Die alternative Flächeninhaltformel habe ich mit eingenommen, da sie Theoretisch auch zur Triangulation und Kartografie beiträgt.

Die Sinusformel

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Mithilfe der Sinusformel lassen sich Winkel und Längen an jedem beliebigen Dreieck berechnen. Dazu müssen lediglich zwei Winkel und eine Länge, oder Zwei Längen und ein (nicht eingeschlossener) Winkel bekannt sein.

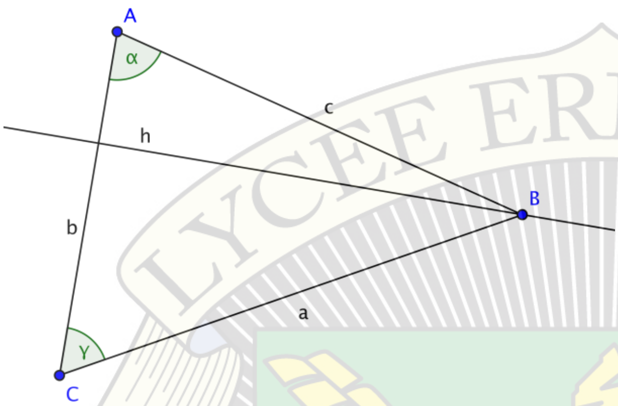
⇒ Anwendung

Das Prinzip der Anwendung ist dasselbe wie weiter oben beschrieben – die bekannten Informationen werden eingesetzt und die Unbekannte isoliert.

Beispiel: siehe Teil 3.2

⇒ Beweis der Sinusformel

- h ist die Höhe von [AC] zu B



Zu beweisen: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

Um die Formel zu beweisen, benutzen wir die uns bekannten Gleichungen. Da diese jedoch einen rechten Winkel beanspruchen, fügen wir eine Höhe h hinzu. So erhalten wir:

$\sin(\alpha)=\frac{h}{c}$ (h wird zur Gegenkathete von α und c zur Hypotenuse)

$\sin(\gamma)=\frac{h}{a}$ (h ist die Gegenkathete von γ und c die Hypotenuse)

Da wir in beiden Gleichungen eine gleiche Unbekannte (h) haben, probieren wir, h in einer Gleichung durch die andere zu Ersetzen. Dafür müssen wir h in beiden Gleichungen isolieren.

$\sin(\alpha)=\frac{h}{c}$

$\Leftrightarrow h = \sin(\alpha) \cdot c$

$\sin(\gamma)=\frac{h}{a}$

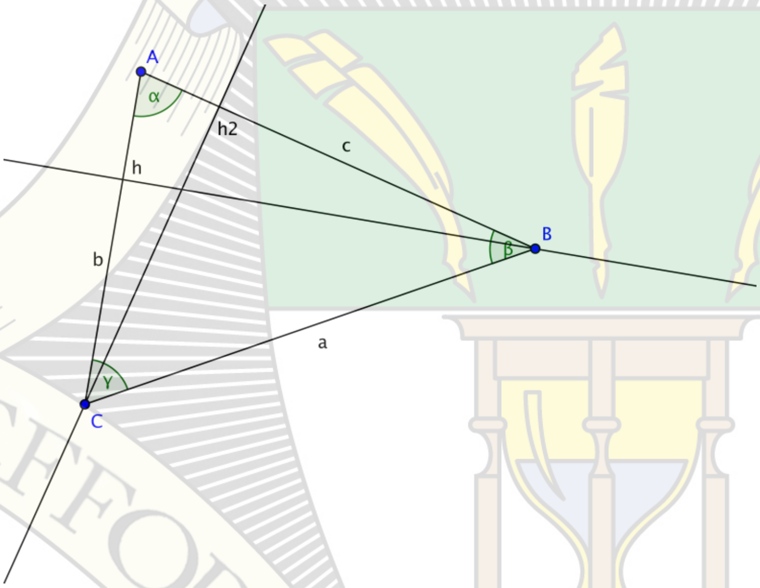
$\Leftrightarrow h = \sin(\gamma) \cdot a$

Wir erhalten so zwei verschiedene Werte für h, die folglich dasselbe sind (Substitution von h). Dadurch können wir sagen, dass:

$\sin(\alpha) \cdot c = \sin(\gamma) \cdot a$ | :a | :c

$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

Nun gilt es, den zweiten Teil der Formel zu Beweisen.



- h_2 ist die Höhe von [AB] zu C

Zu beweisen: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$

(hier: $h_2 = h$)

Wir gehen vor, wie für den Beweis des ersten Teils der Gleichung.

$sin(\alpha) = \frac{h}{b}$

$\Leftrightarrow h = \sin(\alpha) \cdot b$

$sin(\beta) = \frac{h}{a}$

$\Leftrightarrow h = \sin(\beta) \cdot a$

Wir ersetzen h:

$\sin(\alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a \quad |:a \; |:b$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$

Wenn wir nun beide Teile der Gleichung zusammensetzen, erhalten wir die komplette Sinusformel:

$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

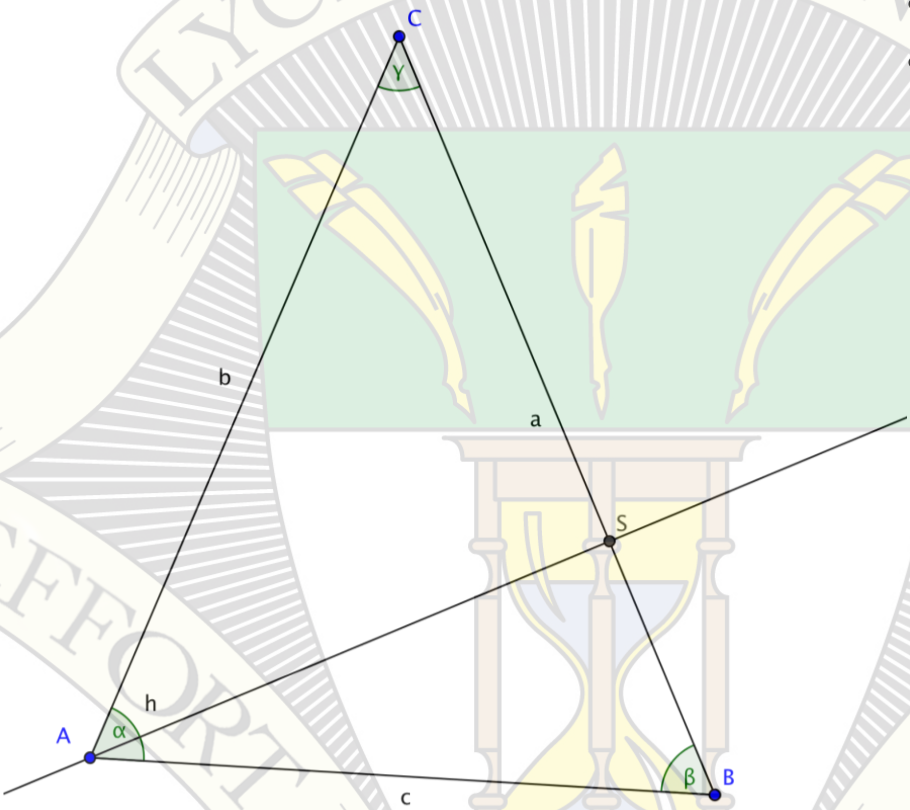
QED

Die Cosinus-formel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos\gamma$$

Die Cosinus-formel basiert auf Pythagoras' Theorem. Sie ist quasi eine Erweiterung der Formel, die die Anwendung bei beliebigen Dreiecken durch den Einbezug des Cosinus-Verhältnisses ermöglicht.

- h ist die Höhe zu A
- S ist der Schnittpunkt der Höhe zur Seite.



⇒ Beweis der Cosinus-Formel

Zu beweisen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$

In einem ersten Schritt wird das Dreieck ABC mithilfe der Höhe h in die zwei rechtwinklige Dreiecke ABS und ASC eingeteilt.

Für die Dreiecke gilt nun:

In ABS:

$c^2 = \overline{BS}^2 + h^2$

$\Leftrightarrow h^2 = c^2 - \overline{BS}^2$

In SCA:

$b^2 = h^2 + \overline{SC}^2$

$\Leftrightarrow h^2 = b^2 - \overline{SC}^2$

Wir haben nun in beiden Dreiecken h^2 isoliert. Nun ersetzen wir es in der einen Gleichung durch die andere.

$c^2 - \overline{BS}^2 = b^2 - \overline{SC}^2$

Nun isolieren wir c^2, um die erste Hälfte der Gleichung zu erlangen.

$c^2 = b^2 + \overline{BS}^2 - \overline{SC}^2$

Nun wird die Rechnung weitergeführt. Da wir wissen, dass $\overline{BS} + \overline{SC} = a$, ersetzen wir $\overline{BS}$ durch $a - \overline{SC}$.

$c^2 = b^2 + (a-\overline{SC})^2 - SC^2$

$\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2a\overline{SC} + \overline{SC}^2 - \overline{SC}^2$

$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2a\overline{SC}$

Wir sehen, dass:

$\cos(\gamma) = \frac{\overline{SC}}{b}$

$\Leftrightarrow \overline{SC} = b \cdot \cos\gamma$

Dies setzen wir nun in unserer Gleichung ein und erhalten nun die Cosinus-formel.

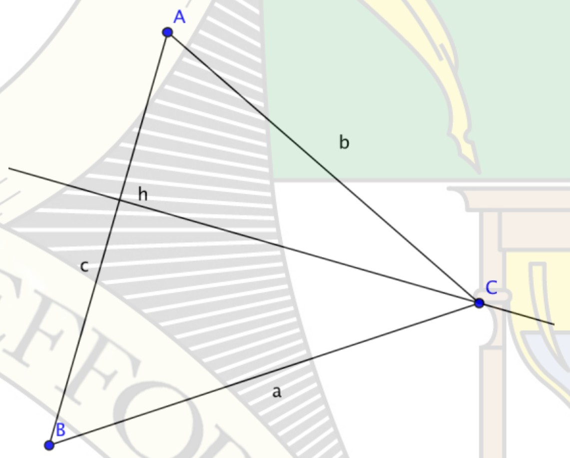
$c^2 = b^2 + a^2 - 2a \times b \times \cos(\gamma)$

QED

Alternative Flächeninhalt-Formel.

Diese alternative Formel zum Flächeninhalt eines Dreiecks ermöglicht die Errechnung des Flächeninhalts ohne die Kenntnis der Höhe zu erfordern. Ich beinhalte sie da mit der Erstellung der Karten auch gleichzeitig Frankreichs Fläche errechnet wurde.

$A = \frac{1}{2} \times \sin(\alpha) \times b \times c$



- h ist die Höhe von ABC zu c

⇒ Beweis der alternativen Flächeninhalt-Formel

Die herkömmliche Formel des Flächeninhalts lautet:

(i)⇔ $A = \frac{c \times h}{2}$

Die Sinusformel lautet in unserem Fall:

(ii)⇔ $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$

Wir isolieren nun in beiden Formeln h, ersetzen es in einer Formel durch die andere und führen die Gleichung weiter.

(i) $\Leftrightarrow \frac{2A}{c} = h$

(ii) $\Leftrightarrow \sin(\alpha) \times b = h$

h wird ersetzt:

$\sin(\alpha) \times b = \frac{2A}{c}$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \times \sin(\alpha) \times b \times c$

QED

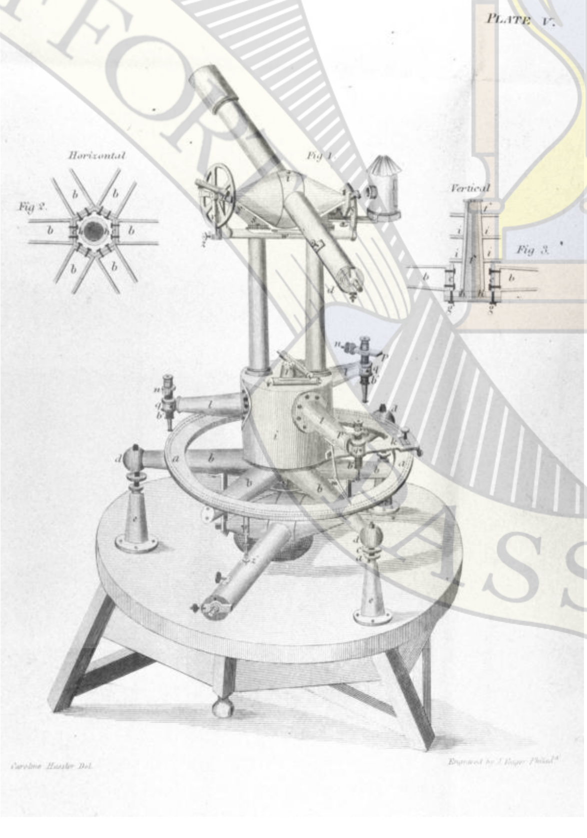
3) Triangulation – Wie wurde kartographiert?

In diesem Kapitel wird der Arbeitsvorgang der Trigonometrischen Landvermessung erläutert.

Instrumente

Der Theodolit

Das wichtigste Messinstrument, welches für die Landvermessung benutzt wurde, war der Theodolit. Dabei handelt es sich um eine Winkelscheibe, über der ein Teleskop mit Fadenkreuz montiert ist. Mithilfe des Teleskops wurden die Messpunkte angepeilt, und der dazwischenliegende Winkel gemessen werden. Das Teleskop selbst konnte auch gekippt werden, um Punkte in jeder Höhe anpeilen zu können. Der Höhenunterschied wird automatisch ausgeglichen, es wurde also immer eine Horizontale Linie errechnet, und nicht die eigentliche Distanz vom Boden zur Spitze des Punkts.



(7) *Theodolit*

Messungen

Der Null-Meridian und das Koordinatensystem

Jede Stelle auf der Erdoberfläche wird durch ihre geografische Länge und Breite festgelegt, Koordinaten anhand der Längen- und Breitengrade. Die Erdoberfläche ist in 360 Länge- und 180 Breitengrade eingeteilt. Die Breitengrade verlaufen Nördlich und Südlich des Äquators, senkrecht zu den Längengraden. Verlängert man einen Radius von den einzelnen Breitengraden zum Mittelpunkt der Erde hin, merkt man dass die einzelnen Scheitel auf regelmäßigen Winkelabständen liegen. Die Längengrade, auch Meridiane genannt, verlaufen ebenfalls in regelmäßigen Abständen vom Nord- zum Südpol. Die Längen- und Breitengrade bilden dadurch ein Netz auf der Erdoberfläche. Dabei handelt es sich um die rechteckigen Einzeichnungen, die man auf einer Weltkarte meist sieht. Anhand der Längen- und Breitengrade kann man jeden Punkt auf der Erdoberfläche genau beschreiben. Dafür werden die einzelnen Abstände zwischen den einzelnen Graden weiter in Gradminuten und –Sekunden eingeteilt, jeweils 60.
Die Meridiane und Breitengrade sind nummeriert, beginnend bei null aufwärts. Die Meridiane werden von einem Nullmeridian aus je 180° an der Erdkugel nach Osten und Westen gezählt, die Breitengrade vom Äquator aus nach Norden und Süden.[1]

Für die kartographischen Messungen in Frankreich legten Picard und Cassini einen Meridian entlang der Symmetrieachse der Pariser Sternwarte. Wichtig war, dass er genau von Norden nach Süden verlief. Zur Bestimmung der Himmelsrichtungen richteten sie sich nach den Sternen.

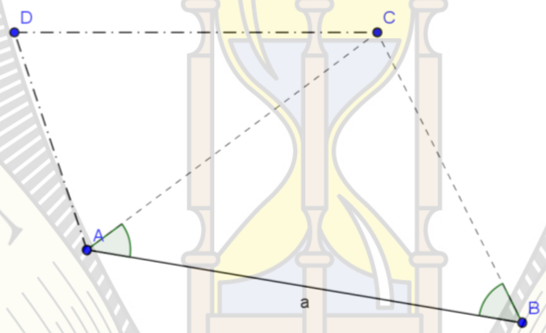
---

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Geographische_Koordinaten#Koordinatensystem

Das Prinzip der Triangulation

Snellius führte die Triangulation als Methode zur Vermessung der relativen Lage von Punkten auf der Erdoberfläche fest. Die Vorgehensweise ist folgende:

Der erste Schritt besteht darin, mithilfe genormter Latten, Drähte oder Ketten eine Grundlinie (a) zu legen. Diese Grundlinie befindet sich idealerweise auf einer Ebene, und ihre Eckpunkte (A, B) werden von 2 Fluchtstangen markiert. Als nächstes geht es darum, einen dritten Punkt zu finden, damit die drei Punkte ein Dreieck formen. Von den zwei Eckpunkten der Grundlinie aus wird nun der dritte Punkt und der jeweils andere Eckpunktmithilfe eines Theodolits anvisiert und die Winkel vermessen. Mit diesen Informationen kann nun die Distanz von den Eckpunkten zum dritten Punkt errechnet, und die relativen Positionen auf Papier übertragen werden. Von den gehabten Punkten aus können nun weitere Punkte (D) anvisiert werden, so dass ein Netzwerk aus Dreiecken entsteht.



Die Punkte, die anvisiert werden, nennt man *Triangulationspunkte*. Wichtig ist, dass sie gut sichtbar sind und eine gut erkennbare Spitze haben. Für die damaligen Vermessungen in Frankreich wurden vor allem Kirchtürme benutzt, die sich besonders gut eignen da sie meist in der Mitte von Ortschaften stehen und ihre Spitze deutlich ist. Waren die Dächer Flach, konnte ganz einfach eine Holzkonstruktion errichtet werden, die eine Spitze auf dem Dach formte. Andere Triangulationspunkte waren auch Mühlen, Berggipfel oder auch vereinzelte Bäume auf freiem Feld. Besonders wichtige Triangulationspunkte wurden auch mit Steinpfeilern markiert, welche auch heute noch

da stehen. Die Pfeiler verjüngen sich an ihrer Spitze zu einer Pyramide, um präzise Messungen zu ermöglichen.

Für extrem lange Distanzen wurden die Triangulationspunkte mithilfe von Lichtsignalen angepeilt. Dafür wurden die Messungen auf die Nacht verlegt, da die Atmosphäre dann klarer ist und das Lichtsignal am besten sichtbar und nicht verzerrt ist.

⇒ Beispiel

Auf dem Foto abgebildet sehen wir ein Feld in der Nähe von Mamer.

Für dieses Beispiel vermessen wir die Distanz von den beiden Eckpunkten der mithilfe von Google Earth gelegten fiktiven Grundlinie bis zum mit C markierten Baum. Der Baum ist von beiden Punkten sowie von anderen Stellen in der Umgebung aus gut sichtbar. Dadurch dient er als guter Triangulationspunkt.

Mithilfe des Programms GeoGebra habe ich die Winkel von den Eckpunkten zum Baum gemessen. Winkel α beträgt 69.96°, Winkel β 88.59°. Folglich beträgt Winkel γ 21,45°. Die Länge der Grundlinie c beträgt 100 m.

Diese Informationen müssen wir nun in eine der Trigonometrischen Formeln einfügen. Da uns die zwei (bzw. drei) Winkel und eine Länge bekannt sind, können wir die Sinusformel anwenden.

Beginnen wir mit Länge a. Der Teil der Formel den wir benutzen wäre in diesem Fall:

$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(69.96)}{a} = \frac{\sin(21{,}45)}{100}$

$\Leftrightarrow a = 256.9$

Die Länge von a misst folglich 256.9 m.

Dasselbe wird nun für b wiederholt:

$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(88{,}59)}{b} = \frac{\sin(21{,}45)}{100}$

$\Leftrightarrow b = 273.373$

Auf diese Weise konnten gigantische Entfernungen gemessen werden. Die Rechnungen können je nach Notwendigkeit adaptiert werden.

4) Schlussfolgerung

Weitere Fragestellungen und Bemerkungen

Während des Arbeitsprozesses sind verschiedene Fragen aufgekommen, die in der Arbeit nicht direkt behandelt werden.

Eine dieser Fragen, welche ziemlich früh aufkam, war ob der Höhenunterschied zwischen zwei Messpunkten nicht die Resultate der Messung verändern würde – dadurch dass dann die Länge zwischen den Punkten an sich und nicht die zum Boden parallele Luftlinie gemessen wird. Als ich mir später jedoch den Aufbau und das Funktionieren des Theodoliten angeschaut habe, wurde klar dass durch den horizontal ausgerichteten Winkelmesser der Höhenunterschied automatisch ausgeglichen wird.

Des Weiteren ist mir aufgefallen dass, mithilfe eines am Teleskop befestigten Winkelmessers, womit der Winkel von einer horizontalen Bodenlinie zum Punkt an sich gemessen wird, man ganz einfach mithilfe der Triangulation und der Distanz zum Punkt auch die Höhe der verschiedenen Punkte messen könnte. Allerdings wurde bei den damaligen Karten keine Rücksicht auf Höhenunterschiede genommen.

Eine letzte Frage befasst sich mit der Lösung der Rechnungen. Mein eigenes Triangulations-Beispiel habe ich mithilfe des Programms WolframAlpha (http://www.wolframalpha.com/) ausgerechnet, für die kleineren Beispiele habe ich den Taschenrechner benutzt – die Hauptproblematik, die bei „manueller“ Lösung der Rechnungen aufkommt, ist die Umrechnung der Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte. Diesbezüglich habe ich herausgefunden, dass es ganze Bücher gibt, in denen all diese Werte eingetragen sind. Allerdings ist mir nicht bekannt, ob Picard, den Cassinis und ihren Helfern diese Mittel bereitstanden – in meinen Quellen habe ich keine weiteren Referenzen diesbezüglich gesehen.

Schlussfolgerung zur kompletten Arbeit

Nach einer anfänglichen Unsicherheit bezüglich des ausgewählten Themas kam meine Arbeit letztendlich doch in Gang. Historische Quellen waren etwas schwierig zu finden, doch für den mathematischen Teil bekam ich Unterstützung von meinem Mathelehrer m. Goedert.

Das Thema entpuppte sich mit der Zeit als sehr interessant, wenn doch wegen fehlenden oder gar inexistenten Quellen viele Fragen offen bleiben.

Das größte Defizit liegt bei der eigentlichen Essenz der Arbeit – die eigentlichen Rechnungen, die Picard und die Cassinis durchführten, in denen die Geschichte mit der Mathematik verschmilzt. Jedoch kann man aus dem Kontext heraus einige offensichtliche Schlüsse ziehen. Die ganze Methode der Triangulation war mit den damaligen Mitteln sehr schwer Umsetzbar, die lange Dauer der Messungen ist dadurch mehr als nachvollziehbar. Hinzu kommt die eigentliche Größe des ganzen Projektes (Frankreich misst eine Fläche von etwa 640.000 km^2), und eine Vielfalt an Kriegen, die während den Arbeiten verliefen und sie mehrmals unterbrachen. Im Endeffekt erwies sich dass es die Mühe wert war, da die präzisen Karten Frankreich bei weiteren Kriegen weit in Vorteil. Und natürlich ist es, wie schon immer in der Geschichte, interessant zu beobachten, wie die Arbeit und Entscheidungen weniger Menschen die Geschehnisse auf ganzen Kontinenten, wenn nicht auf der ganzen Welt, beeinflussen können.

Ich kann von mir behaupten, dass dies bisweilen mein bester und auch größter *Travail Personnel* ist. An einer klaren Struktur und vor allem an ausführlichen Informationen hat es meiner Meinung nach in meinen Arbeiten bisher gefehlt. Ich habe mich in diesem Jahr in meiner Arbeitsweise deutlich verbessert, wenn doch es an verschiedenen Dingen wie Konsequenz mit mir selber während des Vorgangs noch mangelt. Ich bin bereit mich in solchen Punkten in der Zukunft zu verbessern.

In Konklusion habe ich mit dieser Arbeit meine Erwartungen weit Übertroffen (sie lagen am Anfang des Jahres ziemlich niedrig), und habe Interesse daran gewonnen, weitere Arbeiten im Bereich der Mathematik zu verfassen.

Bibliographie

Murdin, P. (2010). *Die Kartenmacher.* Mannheim: Artemis & Winkler.

L'histoire de la cartographie

Lergenmüller A., Schmidt G. (2006). *Mathematik Neue Wege 10*. Schroedel

http://de.wikipedia.org/wiki/Geographische_Koordinaten#Karten

http://de.wikipedia.org/wiki/Geographische_Koordinaten#Koordinatensystem

Bilder:

(1) http://de.wikipedia.org/wiki/Pariser_Observatorium#/media/File:Observatoire_Paris_20030404.jpg

(2) Scan aus *L'histoire de la cartographie*

(3) http://fr.topic-topos.com/image-bd/france/91/pyramide-juvisy-sur-orge.jpg

(4) http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d6/Giovanni_Cassini.jpg

(5) Scan aus *L'histoire de la cartographie*

(6) Scan aus *Die Kartenmacher*, s. 71

(7) http://de.wikipedia.org/wiki/Theodolit#/media/File:Theodolit_Hassler.jpg

(8) Screenshot von GoogleMaps mit Grafiken aus GeoGebra (selbst erstellt)

Die Grafiken in Kapitel 2 habe ich selbst mithilfe des Programms GeoGebra 5 erstellt